

TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Classification des surfaces compactes

SIMEON ROMAIN
M1 MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018 - 2019
TUTEUR : DERAUX MARTIN

L'objectif de ce TER est d'aboutir à la classification des surfaces différentiables à homéomorphisme près. Nous allons dans un premier temps, donner les premières définitions et premiers exemples. Nous définirons les surfaces qui interviendront dans le résultat de classification (somme connexe de tores et somme connexe de plans projectifs). Ensuite dans un second temps, nous allons à l'aide de l'étude du groupe fondamental d'une surface, montrer que les surfaces construites précédemment sont toutes différentes. Dans un troisième temps, nous allons étudier la théorie de Morse dans le cadre des surfaces, ce qui nous permettra de démontrer le théorème de classification et assurer qu'une surface différentiable est homéomorphe soit à une somme connexe de tores ou une somme connexe de plans projectifs.

Table des matières

1	Premières définitions et premiers exemples	4
1.1	Définition d'une surface	4
1.2	Premiers exemples	5
1.3	Orientabilité	6
2	Construction de surfaces et calcul de leurs groupes fondamentaux	8
2.1	Définition et premières propriétés du groupe fondamental	8
2.2	Théorème de Van-Kampen	10
2.3	Somme connexe et construction de surfaces remarquables	11
2.4	Calcul et comparaison de leurs groupes fondamentaux	12
3	Théorie de Morse	14
3.1	Fonctions de Morse	14
3.2	Lemme de Morse	15
3.3	Groupe à un paramètre de difféomorphisme	17
3.4	Valeurs régulières d'une fonction de Morse	17
3.5	Franchissement d'une valeur critique	20
3.6	Modifications et simplifications de la fonction de Morse	22
4	Théorème de classification	28

1 Premières définitions et premiers exemples

L'objectif de ce TER est de classifier les surfaces différentiables compactes à homéomorphisme près. Nous allons donc tout d'abord définir ce qu'est une surface différentiable compacte, étudier quelques exemples, et enfin définir l'orientabilité d'une surface.

1.1 Définition d'une surface

Définition 1.1. Une *variété topologique* de dimension n , est un espace topologique séparé à base dénombrable de voisinages dans lequel tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à la boule unité ouverte de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Les couples $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où φ_i est un homéomorphisme entre l'ouvert U_i et la boule unité de \mathbb{R}^n sont appelés les *cartes*. Une famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que la famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de la variété, est appelé un *atlas*.

On appelle *changement de carte*, les applications $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $i, j \in I$. Une *variété différentielle* est une variété topologique telle que les changements de cartes sont C^∞ .

Une *surface topologique* (resp. *différentiable*) est un cas particulier en dimension 2 des variétés topologiques (resp. différentiables) où chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe (resp. difféomorphe) à la boule unité ouverte de \mathbb{R}^2 .

Remarque. — Il serait équivalent de demander qu'en tout point, il existe un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n .

En effet, soit M une variété, et supposons qu'en $p \in M$ il existe un voisinage V homéomorphe par une application f à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(f(p), r) \subset U$. $f^{-1}(B(f(p), r))$ est alors un voisinage ouvert de p homéomorphe à une boule ouverte de \mathbb{R}^n .

- Le fait que les changements de carte soient au moins C^1 est équivalent à dire que ce sont des difféomorphismes. En effet si tout les changements de cartes sont au moins C^1 , alors l'inverse du changement de carte $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ qui est aussi au moins C^1 car c'est aussi un changement de carte.
- Dans le cas des surfaces compactes, on peut se ramener au cas d'un atlas fini car de tout recouvrement d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

A partir de maintenant, lorsque nous utiliserons le terme surface sans autre précision, la surface considérée sera différentiable.

Pour établir cette classification, nous travaillerons à homéomorphisme près. C'est pour cela que l'on pose la relation d'équivalence suivante :

$$M \sim N \text{ s'il existe un homéomorphisme } f : M \rightarrow N$$

On qualifiera donc de sphère toute surface homéomorphe à la sphère.

Proposition 1.2. Une surface compacte possède un nombre fini de composantes connexes.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une surface compacte possédant un nombre infini de composantes connexes. Alors, en prenant un point dans chaque composante connexe, on crée une suite qui n'admet pas de sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que la surface est compacte. \square

Il n'est pas restrictif d'étudier uniquement les surfaces compactes connexes. En effet, deux surfaces compactes connexes sont homéomorphes si et seulement si elles possèdent le même nombre de composantes connexes et si en écrivant $M = U_1 \cup \dots \cup U_n$ et $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$ où les U_i et les V_i sont les composantes connexes de M et V respectivement, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $U_1 \sim V_{\sigma(1)}, \dots, U_n \sim V_{\sigma(n)}$. On ne s'intéressera donc qu'aux surfaces compactes connexes.

Nous supposerons comme connu le théorème suivant qui nous servira à plusieurs reprises :

Théorème 1.3. Whitney *Toute variété différentielle de dimension m , se plonge dans l'espace euclidien \mathbb{R}^N avec $N \in \mathbb{N}$.*

Il existe une version plus forte de ce théorème qui affirme qu'on peut prendre $N < 2m$. Dans la suite de ce rapport nous n'avons besoin que de la version plus faible ci-dessus. On aura besoin dans la suite du TER du corollaire suivant :

Corollaire 1.4. *Il existe sur la surface M une métrique riemannienne g , c'est-à-dire la donnée en tout point $x \in M$ d'un produit scalaire g_x sur le plan tangent de $T_x M$ qui dépend de manière lisse du point de base.*

1.2 Premiers exemples

Introduisons quelques exemples de surfaces qui seront importants pour le théorème de classifications des surfaces compactes :

Proposition 1.5. *La sphère \mathbb{S}^2 , définie par l'ensemble suivant : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une surface pour la topologie induite.*

Démonstration. Soit $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère. Pour tout point $x \in \mathbb{S}^2 \setminus N$, $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus N$ définit un voisinage ouvert du point x et on obtient un homéomorphisme entre U_N et \mathbb{R}^2 avec la projection stéréographique par rapport au pôle Nord donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \phi(x) : \quad U_N &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1-x_3} \end{aligned}$$

Il reste encore à établir un homéomorphisme entre un voisinage du point N et un ouvert de \mathbb{R}^2 . On a même mieux : on obtient un homéomorphisme entre U_S et \mathbb{R}^2 en utilisant la projection stéréographique par rapport au pôle Sud cette fois. \square

Proposition 1.6. *Le tore \mathbb{T}^2 qui est obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oz un cercle du plan xOy centré en $(0, R, 0)$ et de rayon r avec $r < R$, est une surface.*

Démonstration. Il a pour équation $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$. On a de plus $Df(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pour tout point $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2$. Donc \mathbb{T}^2 est une sous-variété de dimensions 2 d'après le théorème de la submersion et est donc en particulier une surface. \square

Proposition 1.7. *Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ défini par $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$, où $x \sim y$ si et seulement si x et y sont sur la même droite vectorielle, est une surface différentiable.*

Démonstration. On munit tout d'abord $\mathbb{R}P^2$ de la topologie quotient et $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ l'application de passage au quotient. Pour tout $i \in 0, 1, 2$, soit $U_i = \{[x], x_i \neq 0\}$. U_i est ouvert car $\pi^{-1}(U_i) = x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, x_i \neq 0$ est ouvert (complémentaire de l'hyperplan fermé $\{x_i = 0\}$).

De plus, $\phi_0([x]) = \phi_0([1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ est continue en tant que composée de fonctions continues et admet comme réciproque :

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1}([x]) & : \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & U_0 \\ & (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & [(1, x_1, x_2)] \end{aligned}$$

qui est elle aussi continue en tant que composée de fonctions continues. On a donc un homéomorphisme de U_0 vers \mathbb{R}^2 . On a donc trouvé un ouvert inclus dans $\mathbb{R}P^2$ et un homéomorphisme de cet ouvert vers \mathbb{R}^2 pour tout $[x] \in \mathbb{R}P^2$ tel que $x_0 \neq 0$.

On réalise le même homéomorphisme sur $U(1)$ et $U(2)$ et ainsi on a un homéomorphisme en chaque point entre un voisinage du point et \mathbb{R}^2 . En effet il est impossible que $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. On a donc bien tout les points.

Intéressons-nous désormais aux changements de carte : pour $x \in \phi_0(U_0 \cap U_j)$,

$$\phi_j \circ \phi_0^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \frac{x_2}{x_j} \right)$$

qui est lisse. On fait ça aussi pour les cartes de U_1 et U_2 et on montre ainsi que le plan projectif est une surface différentiable. \square

1.3 Orientabilité

Définition 1.8. *On dit qu'une surface est **orientable** si on peut choisir de façon continue une orientation de ses plans tangents. L'**orientation** d'un plan est le choix de deux vecteurs (e_1, e_2) non colinéaires (qui forment donc une base).*

Cela permet de définir le sens direct d'un repère en chacun des points. Intuitivement, on peut observer qu'une surface est orientable si on peut définir deux "côtés" (un intérieur et un extérieur) pour la surface et non-orientable si elle ne possède qu'un côté. Parmi les exemples donnés précédemment, la sphère et le tore sont des surfaces orientables alors que le plan projectif et la bouteille de Klein ne le sont pas. On peut visualiser cela sur les recollements des carrés qui inversent le sens d'un repère. Un objet important à propos de l'orientabilité est le ruban de Möbius obtenu

2 Construction de surfaces et calcul de leurs groupes fondamentaux

2.1 Définition et premières propriétés du groupe fondamental

Définition 2.1. Soit X un espace topologique. On appelle **chemin**, une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Un lacet est un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition 2.2. On dit que l'espace X est **connexe par arcs** si pour tout points $x, y \in X$, il existe un lacet γ reliant x et y , c'est-à-dire tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

On souhaite étudier les lacets à déformations continues près. C'est pour cela qu'on définit la relation d'équivalence appelée homotopie qui suit :

Définition 2.3. Deux chemins γ et δ sont dits **homotopes** s'il existe une application $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que :

- $g(t, 0) = \gamma(t), g(t, 1) = \delta(t) \forall t \in [0, 1]$;
- $g(0, s) = \gamma(0) = \delta(0)$ et $g(1, s) = \gamma(1) = \delta(1) \forall s \in [0, 1]$.

On notera $\gamma \sim \delta$. L'application g est une **homotopie**.

Intuitivement, une homotopie est une déformation continue d'un chemin γ en un chemin δ lorsque s varie de 0 à 1. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins. On définit une opération sur les chemins qui se nomme concaténation et qui permet de coller deux chemins.

Définition 2.4. On définit la **concaténation** de deux chemins γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ comme le chemin suivant :

$$\begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

On note alors $\gamma \cdot \delta$ la concaténation de γ et δ .

Définition 2.5. On appelle **groupe fondamental** de X basé en x_0 l'ensemble des lacets basés en x_0 modulo la relation d'homotopie :

$$\pi_1(X, x_0) = \{\text{lacets basés en } x_0\} / \sim$$

Proposition 2.6. $\pi_1(X, x_0)$ munit de l'opération de concaténation est un groupe.

Démonstration. Vérifions que la concaténation permet d'établir une loi de groupe sur $\pi_1(X, x_0)$.

- La relation d'homotopie est stable pour la concaténation : Soient γ, δ, γ' et δ' des lacets tels que $\gamma \sim \delta$ et $\gamma' \sim \delta'$. Soient F l'homotopie de γ vers δ et G l'homotopie de γ' vers δ' . L'application

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma\gamma'$ vers $\delta\delta'$. On a donc bien $[\gamma] \cdot [\delta'] = [\gamma \cdot \delta']$;

- Avec le même genre d'argument, on peut montrer que la composition des chemins est associative, à homotopie près ;
- La classe d'homotopie $[x_0]$ du lacet constant est l'élément neutre du groupe ;
- On a : $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ où $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1 - s)$.

□

Remarque. Si C est un convexe de \mathbb{R}^n alors $\pi_1(C, x_0) = \{x_0\}$.

Démonstration. On rétracte tout lacet γ en le lacet constant basé en x_0 par une homotopie en ligne droite : $f(t, s) = x_0 + (1 - t)(\gamma(s) - x_0)$. □

Théorème 2.7. Si X est connexe par arcs alors $\pi_1(X, x) \sim \pi_1(X, y) \forall x, y \in X$.

Démonstration. Soient x et y deux points de X . Soit γ un chemin reliant x à y . Soit g de $\pi_1(X, x)$ vers $\pi_1(X, y)$ l'application qui a tout lacet l associe le lacet $\gamma l \gamma^{-1}$. g est un isomorphisme d'inverse $l' \rightarrow \gamma^{-1} l' \gamma$ car $l \sim \gamma^{-1} \gamma l \gamma^{-1} \gamma$. On a donc bien $\pi_1(X, x) = \pi_1(X, y)$ □

Remarque. Le groupe fondamental d'un espace X , basé en x est déterminé par la composante connexe de x . On peut donc définir le groupe fondamental d'un espace connexe X sans parler de son point base. On utilisera désormais la notation $\pi_1(X)$ pour parler du groupe fondamental d'un espace X connexe.

Proposition 2.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue, l'application :

$$\begin{aligned} f_* & : \pi_1(X) &\rightarrow & \pi_1(Y) \\ & [\gamma] &\mapsto & [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes. De plus pour toute fonction $g : Y \rightarrow Z$ continue, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $Id_* = Id$.

Démonstration. En effet, si $[\gamma] = [\delta]$ alors $[f \circ \gamma] = [f \circ \delta]$ et de plus $f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$. □

Corollaire 2.9. Le groupe fondamental est un invariant topologique, c'est-à-dire que deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme de X dans Y . Alors d'après la proposition précédente, $f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = Id$. Donc f_* définit un isomorphisme de groupes. □

Deux espaces homotopes ont donc des groupes fondamentaux isomorphes.

Exemple. Le groupe fondamental de la sphère de dimension 2 est trivial :

$$\pi(\mathbb{S}^2) = 1$$

Démonstration. Soit γ un lacet basé au pôle Nord (de coordonnées $(0, 0, 1)$) si le lacet passe par S (même un nombre infini de fois), on le dévie légèrement (en le faisant contourner une petite boule autour de S), on suppose que γ ne passe jamais par le pôle Sud (de coordonnées $(0, 0, -1)$). La projection stéréographique de la sphère par rapport au pôle Sud, montre que $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 qui est simplement connexe (car convexe). \mathbb{S}^2 est donc simplement connexe et son groupe fondamental est donc trivial. \square

Proposition 2.10. $\pi_1(X \times Y)$ est isomorphe à $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Démonstration. Cela se déduit du fait que se donner une application continue à valeur dans $X \times Y$ revient à se donner deux applications continues : l'une à valeur dans X et l'autre à valeur dans Y . \square

Exemple. Le groupe fondamental du tore \mathbb{T} est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, c'est-à-dire un groupe libre à deux générateurs.

Démonstration. Cela se déduit de la proposition précédente en sachant que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. \square

2.2 Théorème de Van-Kampen

L'outil que nous allons utiliser pour calculer les groupes fondamentaux de plusieurs espaces est le théorème de Van-Kampen. Dans cette partie, nous allons tout d'abord définir le produit libre de deux groupes qui est nécessaire à l'utilisation du théorème de Van-Kampen et dans un second temps, énoncer le théorème de Van-Kampen.

Définition 2.11. Soit X un ensemble. On appelle **mot** sur X un élément de la forme $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ où $s_i \in X$. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mots sur X . L'application de concaténation suivante fournit donne une structure de monoïde à l'ensemble $\mathcal{M}(X)$:

$$\begin{aligned} \text{concat} : \quad \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) &\rightarrow \mathcal{M}(X) \\ \left((s_{n_1}, \dots, s_{n_N}), (s_{n'_1}, \dots, s_{n'_{N'}}) \right) &\mapsto (s_{n_1}, \dots, s_{n_N}, s_{n'_1}, \dots, s_{n'_{N'}}) \end{aligned}$$

Le neutre de cette loi est par définition le mot vide $()$.

Désormais nous allons nous intéresser au cas où X est construit à l'aide de deux groupes.

Soient G_1 et G_2 deux groupes dont e_1 et e_2 sont les neutres respectifs. On pose $X = G_1 \sqcup G_2$ (réunion disjointe des deux groupes).

On souhaite construire une relation d'équivalence \sim qui aurait les propriétés suivantes :

- si $g, h \in G_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ alors $(g, h) \sim (gh)$ où (g, h) est un mot de longueur 2 et (gh) est le mot de longueur 1 composée de la lettre gh ,
- si $g \in G_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ alors le mot $(g, g^{-1}) \sim ()$ où $()$ est le mot vide.

Construisons une relation d'équivalence comme-ci dessus :

Définition 2.12. On dit que les mots $u = (s_{n_1}, \dots, s_{n_k}, s_{n_{k+1}}, \dots, s_{n_N})$ et $v = (s_{n_1}, \dots, (s_{n_k} s_{n_{k+1}}), \dots, s_{n_N})$ pour $s_i \in X$ et pour s_{n_k} et $s_{n_{k+1}}$ dans le même groupe G_i sont **élémentairements équivalents**.

On dit également que les mots $u = (s_{n_1}, \dots, s_{n_k}, e_i, s_{n_{k+1}}, \dots, s_{n_N})$ et $v = (s_{n_1}, \dots, s_{n_k}, s_{n_{k+1}}, \dots, s_{n_N})$ sont **élémentairements équivalents**.

Enfin, on dit que u et v sont **équivalents** et on note $u \sim v$ si on peut passer de u à v par une suite finie d'équivalences élémentaires.

Proposition 2.13. \sim est une relation d'équivalence et de plus M/\sim muni de la concaténation possède une structure de groupe. On appelle ce groupe **produit libre** de G_1 et de G_2 et on le note $G_1 * G_2$.

Démonstration. La preuve est faite dans [Lan] ou encore [Cal]. □

Remarque. Un mot réduit de groupes G_1 et G_2 peut être vu comme une suite finie d'éléments provenant alternativement de G_1 et de G_2 .

Théorème 2.14. Soit X un espace topologique qui s'écrit comme réunion de deux ouverts connexes par arcs $X = U_1 \cup U_2$ tels que $U_1 \cap U_2$ est non vide et connexe par arcs. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Alors :

1. Le morphisme naturel $\varphi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est surjectif¹ ;
2. Le noyau de ce morphisme est égal au plus petit sous-groupe distingué contenant les éléments du produit libre de la forme $g_1 * g_2^{-1}$, où $g_1 \in \pi_1(U_1, x_0)$, $g_2 \in \pi_1(U_2, x_0)$ sont les représentants respectifs d'un même lacet de $U_1 \cap U_2$. On a donc une caractérisation du groupe fondamental de X :

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)}{\ker(\varphi)}$$

Démonstration. Se référer à [Hat]. □

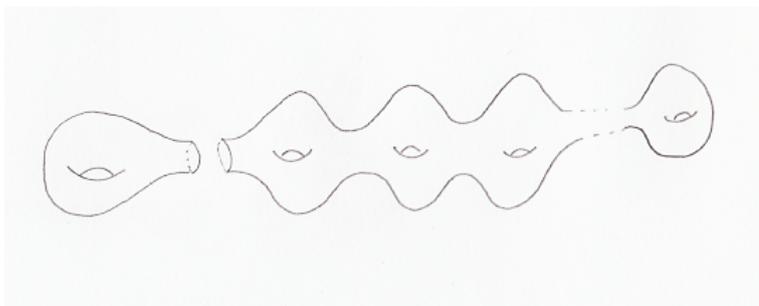
2.3 Somme connexe et construction de surfaces remarquables

Définition 2.15. Soient V et V' deux surfaces, on appelle **somme connexe** et on note $V \# V'$ l'espace obtenu en retirant une boule B à V et une boule B' à V' et en recollant $V \setminus B$ à $V' \setminus B'$ suivant un homéomorphisme entre leurs bords homéomorphe à \mathbb{S}^1 .

La somme connexe est bien définie (c'est-à-dire que ça ne dépend pas des boules choisies ni de l'homéomorphisme et le résultat de la somme connexe de deux surfaces est bien une surface). Nous ne ferons pas la preuve de cette assertion (on peut la trouver dans [Flo]). On rappelle que \mathbb{T}_1 désigne le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Et on pose $\mathbb{T}_0 = \mathbb{S}^2$.

Définition 2.16. On définit par récurrence la **surface orientée de genre n** avec $n \geq 1$ comme suit : $\mathbb{T}_{n+1} = \mathbb{T}_n \# \mathbb{T}_1$.

1. Il s'agit du morphisme qui envoie une suite de lacets de U_1 et U_2 dans X par la composition de chacun des lacets de U_1 et U_2 comme des lacets vus dans X



On pose $\mathbb{U}_1 = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ où $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ désigne le plan projectif réel.

Définition 2.17. On définit par récurrence la **surface non orientée de genre n** avec $n \geq 1$ comme suit : $\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \# \mathbb{U}_1$.

2.4 Calcul et comparaison de leurs groupes fondamentaux

Proposition 2.18. Le groupe fondamental de \mathbb{T}_n est isomorphe au groupe libre à $2n$ -générateurs $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ quotienté par le sous groupe distingué engendré par $[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Démonstration. Calculons les groupes fondamentaux des \mathbb{T}_n par récurrence.

On note \mathbb{V}_n l'espace obtenu en enlevant un disque à \mathbb{T}_n . On a déjà montré que $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Supposons la propriété que pour un certain entier n , $\pi_1(\mathbb{V}_n)$ soit le groupe libre à $2n$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ et que la classe du bord de \mathbb{V}_n soit $[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]$. \mathbb{V}_{n+1} s'obtient comme somme connexe de \mathbb{V}_n et de \mathbb{V}_1 . D'après le théorème de Van-Kampen, $\pi_1(\mathbb{V}_{n+1})$ est le groupe à $2(n+1)$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_{n+1}, b_{n+1}$ et la classe du bord de \mathbb{V}_1 est $[a_1, b_1] \dots [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Ce qui achève la récurrence. \square

Proposition 2.19. Le groupe fondamental de \mathbb{U}_n est isomorphe au groupe libre à n -générateurs a_1, \dots, a_n quotienté par le sous groupe distingué engendré par $a_1^2 \dots a_n^2$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que le groupe fondamental du plan projectif est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{U}_1 = M \# D$ où M est un ruban de Moebius et D un disque. $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ et le bord S de M est homotope au double du générateur (on fait deux tours avant de revenir à son point de départ). On a donc bien le résultat voulu pour $n = 1$. Le résultat s'obtient ensuite par récurrence à l'aide du théorème de Van-Kampen. \square

Proposition 2.20. Parmi les surfaces \mathbb{T}_p pour $p \geq 0$ et \mathbb{U}_q pour $q \geq 1$, aucune d'entre-elles ne sont homéomorphes.

Démonstration. Nous avons démontré que le groupe fondamental de la sphère était trivial et que $\pi_1(\mathbb{T}_p)$ était le quotient d'un groupe libre à $2p$ générateurs par un produit de commutateurs. Nous avons également démontré que le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{U}_q)$ est le quotient du groupe libre à q générateurs $\alpha, \beta, \dots, \mu$ par le sous-groupe distingué engendré par $\alpha^2, \beta^2, \dots, \mu^2$. L'abélianisé de ces groupes fondamentaux sont : 1 pour la sphère, \mathbb{Z}^{2p}

pour \mathbb{T}_p et $\mathbb{Z}^{q-1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui sont non isomorphes deux à deux. Ces surfaces sont donc deux à deux non homéomorphes. \square

On a donc montré que les groupes fondamentaux des surfaces \mathbb{S}^1 , \mathbb{T}^n et \mathbb{U}_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ étaient tous différents. Ce sont donc des surfaces non homéomorphes d'après le corollaire 2.9. La classification des surfaces contiendra donc au moins les surfaces décrites ci-dessus.

3 Théorie de Morse

Nous allons dans cette partie, développer la théorie de Morse qui relie l'étude de la topologie de la sous-variété à l'étude de points critiques de certaines fonctions. Nous allons à l'aide des fonctions de Morse, étudier la structure des surfaces différentiables compactes en les coupant en ensembles de niveau d'une fonction bien choisie. Cela nous permettra de montrer que nous avons au plus, à homéomorphisme près, les surfaces que nous avons obtenues dans la partie précédente. Et ainsi nous aurons établi notre classification des surfaces à homéomorphisme près.

3.1 Fonctions de Morse

Tout d'abord voici quelques rappels de calcul différentiel et l'introduction des fonctions de Morse.

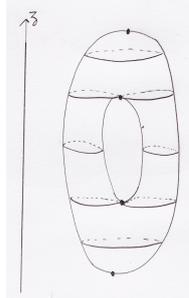
Définition 3.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable.

- $x \in U$ est un point critique si $df(x) = 0$;
- Un point critique $x \in U$ est dit non-dégénéré si $df^2(x)$ est de rang maximal. Dans le cas contraire, le point critique x est dit dégénéré ;
- On appelle valeur critique un $y \in \mathbb{R}^m$ image d'un point critique et on appelle valeur régulière un $y \in \mathbb{R}^m$ qui n'est pas une valeur critique.

Définition 3.2. Une fonction de Morse est une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ dont les points critiques sont non-dégénérés et ayant des valeurs critiques toutes distinctes.

Par rapport à la plupart des auteurs, on rajoute la condition que les valeurs critiques soient toutes distinctes car cela nous sera utile pour étudier le passage des points critiques l'un après l'autre. On aurait pu s'abstenir de cette condition dans la définition et ensuite se ramener à une fonction comme-ci dessus à l'aide des modifications possibles sur la fonction de Morse que l'on développera dans la section 3.6.

Exemple. Soit \mathbb{T}^2 le tore obtenu en faisant tourner le cercle $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ autour de l'axe \mathcal{O}_x . Alors la fonction cote de x , $(x, y, z) \rightarrow x$ est une fonction de Morse. Elle possède quatre points critiques non-dégénérés avec des valeurs critiques différentes.



3.2 Lemme de Morse

Nous allons tout d'abord montrer qu'au voisinage d'un point critique non dégénéré, on peut trouver des coordonnées qui permettent de mieux représenter ce qu'il se passe autour de ce point critique.

Définition 3.3. Soit f une fonction de Morse. On appelle *indice d'un point critique* x de f , la dimension du plus grand sous-espace de \mathbb{R}^2 sur lequel la Hessienne est définie négative.

Nous allons étudier ce qu'il se passe localement autour des points critiques à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.4. (Morse) Soit f une fonction de Morse et q un point critique d'indice i de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe alors un paramétrage ϕ avec des coordonnées locales (X, Y) d'un voisinage $\phi(U)$ de q tel que :

$$f(\phi(X, Y)) = f(q) + g_i(X, Y) \text{ avec } \begin{cases} g_0(X, Y) = X^2 + Y^2 \\ g_1(X, Y) = X^2 - Y^2 \\ g_2(X, Y) = -X^2 - Y^2 \end{cases}$$

Démonstration. Cela revient à montrer que pour $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe au moins C^3 définie sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^2 telle que 0 est un point critique non-dégénéré d'indice i , il existe un difféomorphisme $(x, y) = \theta(X, Y)$ d'un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^2 sur un voisinage $\theta(V)$ de 0 dans U satisfaisant les conditions suivantes :

$$g(\theta(X, Y)) = g(0) + \begin{cases} X^2 + Y^2 & \text{si } i = 0 \\ X^2 - Y^2 & \text{si } i = 1 \\ -X^2 - Y^2 & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

On pose $r = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)$, $s = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0)$ et $t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0)$. On a $rt - s^2 \neq 0$ car le point 0 n'est pas dégénéré.

On pose :

$$R(x, y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(tx) dt, \quad R(0) = r,$$

$$S(x, y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(tx) dt, \quad S(0) = s,$$

$$T(x, y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(tx) dt, \quad T(0) = t;$$

Ce qui nous permet d'écrire la formule de Taylor reste intégral à l'ordre 2 :

$$g(x, y) - g(0) = R(x, y)x^2 + 2S(x, y)xy + T(x, y)y^2.$$

On distingue 3 cas :

1er cas : $rt - s^2 > 0$ et $t > 0$. R et T sont donc également strictement positifs au voisinage de 0 et :

$$g(x, y) - g(0) = R(x, y) \left(x + y \frac{S(x, y)}{R(x, y)} \right)^2 + y^2 \frac{R(x, y)T(x, y) - S(x, y)^2}{R(x, y)}$$

En posant : $\begin{cases} X = \sqrt{R} \left(x + y \frac{S}{R} \right), \\ Y = y \sqrt{\frac{RT - S^2}{R}} \end{cases}$, on obtient $g(x, y) - g(0) = X^2 + Y^2$ et l'indice du point critique est donc 0.

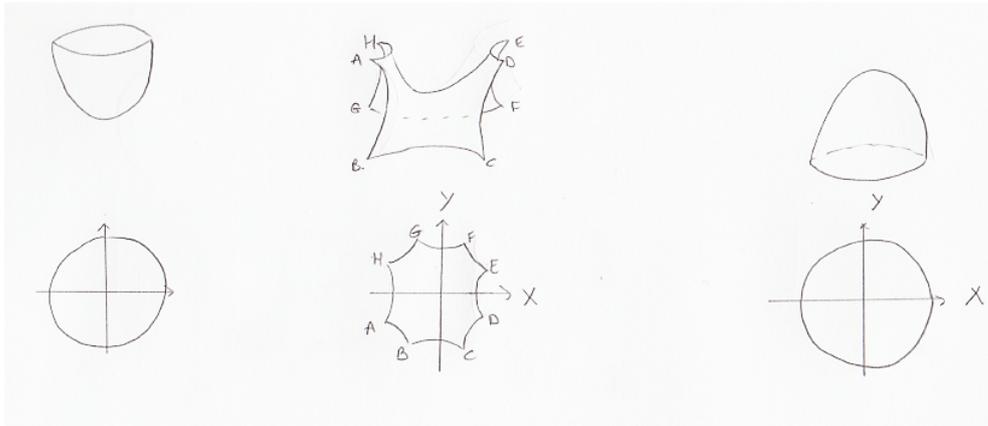
Reste à vérifier que le couple (X, Y) est bien un système de coordonnées locales. Cela est vrai car le déterminant jacobien à l'origine est $\sqrt{rt - s^2} \neq 0$ car $\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{r}$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{\frac{rt - s^2}{r}}$.

2ème cas : $rt - s^2 > 0$ et $t < 0$. On se ramène au cas précédent en posant $f = -g$. Et donc $-(g(x, y) - g(0)) = f(x, y) - f(0) = X^2 + Y^2$ d'où $g(x, y) - g(0) = -X^2 - Y^2$. L'indice du point critique est 2.

3ème cas : $rt - s^2 < 0$. On raisonne comme dans le cas 1 si r ou t n'est pas nul sinon on s'y ramène par un changement linéaire de coordonnées. On trouve $g(x, y) - g(0) = X^2 - Y^2$ et l'indice du point critique est 1. \square

Définition 3.5. Soit i un point critique non dégénéré. On appelle *voisinage modèle* pour la fonction g_i , un voisinage $U(s)$ de \mathbb{R}^2 donné par :

- si $i = 0$: $U(s) = B_f(0, \sqrt{s})$, c'est l'ensemble des points tels que $g_0(X, Y) \leq s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_0(X, Y) = s$,
- si $i = 1$: $U(s)$ est l'ensemble des points tels que $|X^2 - Y^2| \leq s$ et $|XY| \leq s$. Il est limité par les arcs suivants (voir image ci-dessous) :
 - BC et FG de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = -s$
 - AH et DE de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = s$
 - AB et EF de l'hyperbole $XY = s$
 - CD et GH de l'hyperbole $XY = -s$,
- si $i = 2$: $U(s) = B_f(0, \sqrt{s})$ c'est l'ensemble des points tels que $g_2(X, Y) \leq -s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_0(X, Y) = -s$.



Définition 3.6. On appelle **voisinage canonique** de grandeur s d'un point critique non-dégénéré c de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, une paramétrisation $\varphi : U(s) \rightarrow M$ de M centrée en c où $U(s)$ est un voisinage modèle telle que $f(\varphi(X, Y)) = f(c) + g_i(X, Y)$ avec i l'indice du point critique c .

C'est le lemme 3.4 qui assure l'existence de voisinages canoniques.

3.3 Groupe à un paramètre de difféomorphisme

Définition 3.7. Un **groupe à un paramètre de difféomorphismes** de classe C^r

d'une variété M est une application $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ telle que :

1. $\forall t \phi_t : M \rightarrow M$ est un C^r difféomorphisme,
2. $\forall s, t \phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ et $\phi_0 = id_M$.

Définition 3.8. Un **champ de vecteur** sur M , est une application X telle que $\forall x \in M, X(x) \in T_x M$. Le champ de vecteur est de classe C^r si l'application est C^r .

Remarque. Soit ϕ un groupe à un paramètre de difféomorphisme. L'application $X(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \right]_{t=0}$ est un champ de vecteur sur M de classe C^{r-1} . On dira que le groupe à paramètre de difféomorphisme ϕ engendre le champ de vecteur X .

Réciproquement, sous certaines hypothèses de continuité, un champ de vecteur engendre un groupe à paramètre de difféomorphisme.

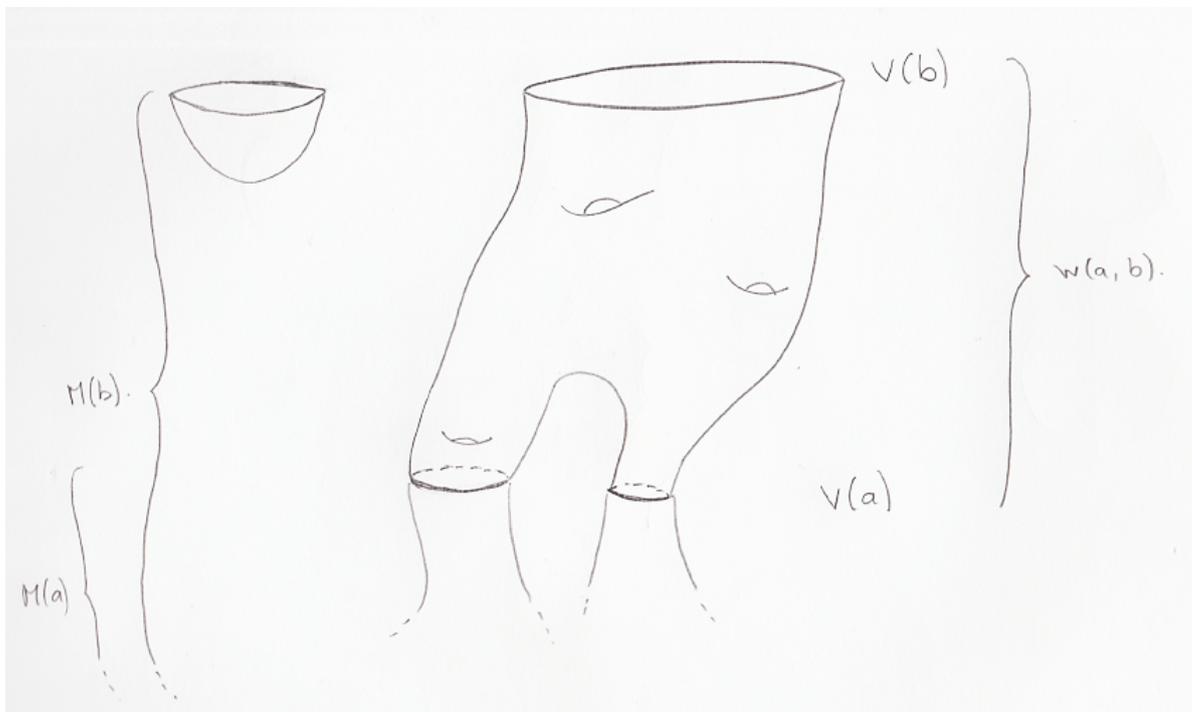
Théorème 3.9. M une surface compacte, X un champ de vecteur sur M de classe C^r . Alors il existe ϕ un groupe à un paramètre de difféomorphisme engendré par X .

3.4 Valeurs régulières d'une fonction de Morse

Définition 3.10. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $a < b$ deux valeurs régulières. On note alors :

$$- V(a) = f^{-1}(a) = \{x \in M | f(x) = a\}$$

- $M(a) = f^{-1}(]-\infty; a]) = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$
- $W(a, b) = f^{-1}([a, b]) = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$



Proposition 3.11. *Si $a < b$ sont deux valeurs régulières telle que la fonction de Morse f n'admette pas de point critique entre a et b , alors :*

- $V(a)$ difféomorphe à $V(b)$;
- $M(a)$ difféomorphe à $M(b)$;
- $W(a, b)$ est difféomorphe à $V(a) \times [a, b]$.

Démonstration. Soient x_1, \dots, x_n les points critiques de f sur $M(a)$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des paramétrisations de $B(0, 1)$ dans M centrées en ces points.

On choisit $1/2 > \epsilon > 0$ tel que $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i(B(0, 2\epsilon)) \cap \varphi_j(B(0, 2\epsilon)) = \emptyset$.

Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ au moins C^1 telle que $\omega = 0$ sur $B(0, \epsilon)$ et $\omega = 1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 2\epsilon)$.

On pose $C_\epsilon = \cup_{i=1}^n \varphi_i(D(0, \epsilon))$. Soit $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ défini comme suit : $\alpha(x) = 1$ si $x \in M \setminus C_\epsilon$, Soit

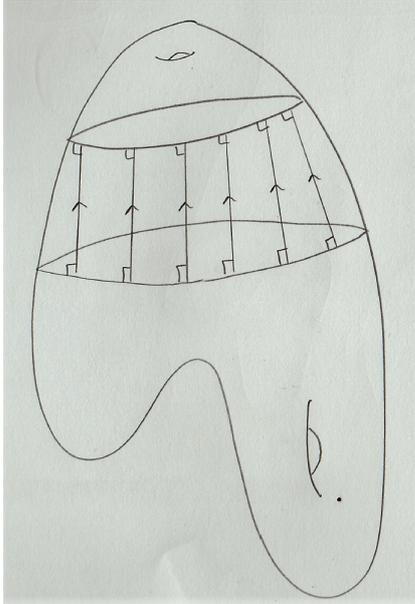
$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M \setminus C_\epsilon \\ 0 & \text{si } x \in C_\epsilon \\ \omega(\varphi_i^{-1}(x)) & \text{si } x \in C_{2\epsilon} \setminus C_\epsilon \text{ pour } i \text{ tel que } x \in \varphi_i(B(0, 2\epsilon)) \setminus \varphi_i(B(0, \epsilon)) \end{cases}$$

Soit X le champ de vecteur défini pour tout $x \in M(b) \setminus C_\epsilon$ sur M tel que $X(x)$ est le vecteur du plan tangent $T_x M$ orthonormal à $\{y \mid f(y) = f(x)\}$ et orienté dans le sens de la croissance de f (ceci est possible grâce au corollaire 1.4).

Soit

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)X(x)}{Df(X(x))} & \text{si } x \text{ n'est pas critique} \\ 0 & \text{si } x \text{ critique} \end{cases}$$

$Y(x)$ est différentiable (vaut 0 sur les points critiques) et on a : $Df(Y(x)) = \alpha(x)$. Quitte à prendre ϵ plus petit, puisqu'il n'y a pas de points critiques sur $W(a, b)$, on peut supposer que $\alpha|_{W(a,b)} = 1$.



Soit φ_t le groupe à difféomorphisme de M associé à Y .

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_t(x)) = Df(Y(\varphi_t(x))) = \alpha(\varphi_t(x))$$

Et donc si $f(\varphi_t(x)) \in [a, b]$, alors $\alpha(\varphi_t(x)) = 1$ car $\alpha = 1$ sur $W(a, b)$.

En particulier, le difféomorphisme φ_{b-a} envoie $M(a)$ sur $M(b)$ et $V(a)$ sur $V(b)$. De

plus $\psi : V(a) \times [a, b] \rightarrow W(a, b)$ est un difféomorphisme d'inverse $\psi^{-1}(y) =$
 $(x, t) \mapsto \varphi_{t-a}(x)$
 $(\varphi_{a-f(y)}(y), f(y))$ ce qui conclut la fin de la preuve. \square

3.5 Franchissement d'une valeur critique

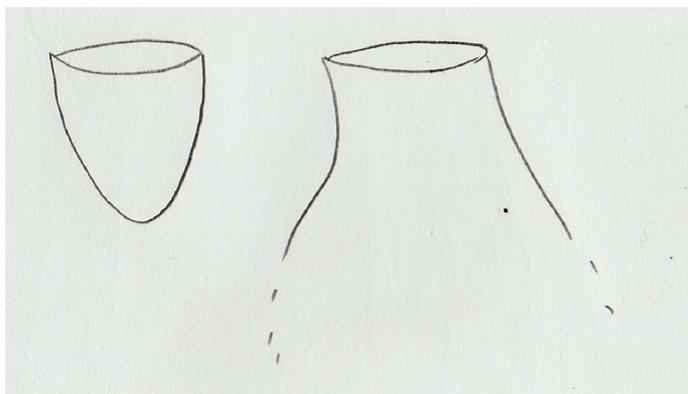
Soit f une fonction de Morse sur la surface M , c un point critique de f . Soient a et b tels que $a = f(c) - \epsilon$ et $b = f(c) + \epsilon$ avec ϵ assez petit pour qu'il n'y ait que le point critique c dans $W(a, b)$.

Nous allons nous intéresser dans les trois propositions qui suivent aux changements produits par le franchissement d'une valeur critique.

Proposition 3.12. *Si c est un point critique d'indice 0, alors :*

- $M(b)$ est difféomorphe à $M(a) \sqcup D$ où D est un disque de dimension 2
- $V(b)$ est difféomorphe à $V(a) \sqcup S$ où $S = \partial D$

Où \sqcup signifie union disjointe.



Démonstration. Soit U un voisinage canonique de c délimité par la ligne de niveau $f(c) + \epsilon$. $D = M(b) \cap U$ est difféomorphe à $X^2 + Y^2 \leq \epsilon$ et $S = \partial D$ est difféomorphe à $X^2 + Y^2 = \epsilon$ d'après le lemme de Morse 3.4.

De plus $V(a) \cap U = \emptyset$ et $M(a) \cap U = \emptyset$ car $f(c) > f(a)$ et $f(c)$ est le minimum de f sur U .

On raisonne comme dans le cas de la proposition 3.11 ou il n'y a pas de point critique avec une fonction nulle sur le voisinage canonique de c , ce qui montre que :

- $M(b) \setminus D$ est difféomorphe à $M(a)$
- $V(b) \setminus S$ est difféomorphe à $V(a)$.

On a donc bien le résultat. □

Proposition 3.13. *Si c est un point critique d'indice 2, alors :*

- $M(b)$ est difféomorphe à $M(a) \cup D$ où D est un disque de dimension 2 qui est recollé sur $M(a)$ le long du cercle $S \subset V(a)$ où $S = \partial D$
- $V(b)$ est difféomorphe à $V(a) \setminus S$

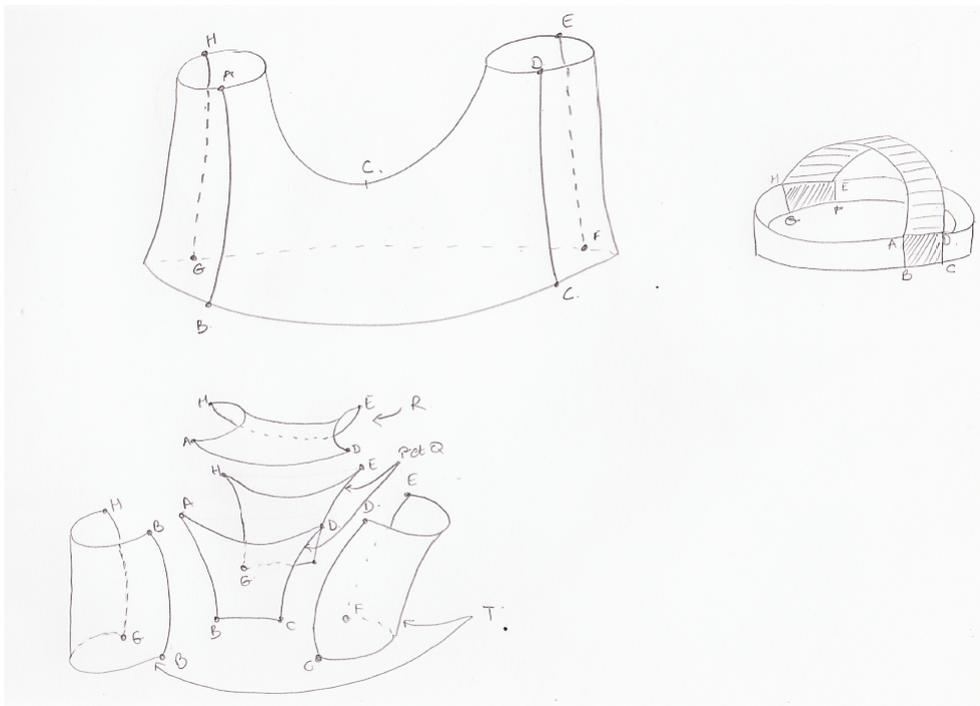
Démonstration. Soit U un voisinage canonique délimité par $f(c) - \epsilon$. $D = M(b) \cap U$ est difféomorphe à $-X^2 - Y^2 \geq -\epsilon$ et $S = V(a) \cap U$ à $-X^2 - Y^2 = -\epsilon$ d'après le lemme de Morse 3.4.

$V(b) \cap U = \emptyset$ car $f(b) > f(c)$ et $f(c)$ est le maximum de f sur U .

On raisonne comme dans le cas de la proposition 3.11 ou il n'y a pas de point critique

pour montrer que $M(b) \setminus D$ est difféomorphe à $M(a)$ et $V(b)$ est difféomorphe à $V(a) \setminus S$ et on a ainsi le résultat. \square

Proposition 3.14. *Si c est un point critique d'indice 1 alors $M(b)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un rectangle par deux de ses côtés opposés, le long de deux segments disjoints I et J contenus dans $V(a)$*



Démonstration. Soit U' un voisinage canonique de c compris entre les lignes de niveau $f(c) - 2\epsilon$ et $f(c) + 2\epsilon$ et U un second voisinage canonique, inclus dans U' et plus petit, compris entre les lignes de niveau $a = f(c) - \epsilon$ et $b = f(c) + \epsilon$.

On obtient $M(b)$ en recollant $W(a, b)$ à $M(a)$ le long de $V(a)$. De plus, $W(a, b)$ s'obtient en recollant U et $T = \overline{W(a, b)} \setminus U$.

L'intersection de U et $V(a)$ est constituée de deux segments $I = BC$ et $J = FG$. On pose $K = T \cap V(a) = \overline{V(a)} \setminus (I \cup J)$. Dans un premier temps, montrons que T est homéomorphe à $K \times [a, b]$. Pour ce faire on raisonne à nouveau comme pour la proposition 3.11 avec une fonction α nulle sur le voisinage U et qui vaut 1 sur T . Il faut tout de même adapter l'argument, en construisant un champ de vecteur tel que les courbes intégrales issues des points $x \in T$, restent dans T entre les niveaux a et b .

Nous construisons donc un champ de vecteur qui possède cette propriété :

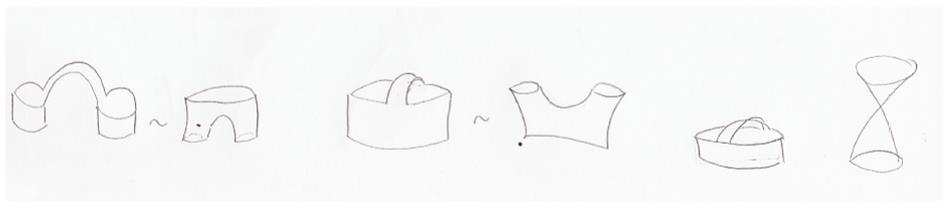
$$Y(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)}{\|\text{grad}(f(x))\|^2} (f(x)) & \text{si } x \in T \\ 0 & \text{si } x \notin T \end{cases}$$

Soit φ le groupe à un paramètre de difféomorphisme généré par le champ de vecteur Y . Définissons l'application $\phi : K \times [a, b] \rightarrow T$ telle que $\phi(x, t) = \varphi_{t-a}(x)$. Cette application

est le difféomorphisme que l'on recherche.

Il faut donc montrer que $\phi(x, t) \in T$ pour tout $x \in K$ et $t \in [a, b]$ pour prouver l'assertion précédente.

Définissons l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(t) = f \circ \varphi_{t-a}(x)$. Puisque $g'(t) = \alpha(\varphi_{t-a}(x))$, on a $0 \leq g'(t) \leq 1$ et $g(a) = a$. Par le théorème des accroissements finis, $g(t) - g(a) \leq t - a$ d'où $g(t) \leq g(a) + t - a \leq b$. Puisque g est croissante, $g(t) \geq g(a) = a$ pour tout $t \in [a, b]$. D'où $\varphi_{t-a}(x) \in W(a, b)$ pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $x \in K$. Reste à montrer que $\phi(x, t) \notin U$ pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $x \in K$. Soient les segments AB, EF, CD et GH qui composent la frontière commune à T et U . Supposons que pour un certain $x \in K$ et un certain $t \in [a, b]$, $\varphi_{t-a}(x) \in \text{int}(U)$. Alors $\varphi_{t-a}(x)$ intersecte à un moment la frontière commune à T et U et $\varphi_{t-a}(x)$ est l'un des segments ci-dessus de par la construction de Y . On a donc bien $\varphi_{t-a}(x) \in T$ pour tout $t \in [a, b]$ et tout $x \in K$. On a donc montré que T est homéomorphe à $K \times [a, b]$. \square



3.6 Modifications et simplifications de la fonction de Morse

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux modifications que l'on peut effectuer sur la fonction de Morse. Nous souhaitons modifier f en une nouvelle fonction de Morse g possédant les mêmes points critiques avec les mêmes indices mais avec des valeurs critiques différentes. Cela nous sera utile pour simplifier la fonction de Morse mais également dans la preuve du théorème de classification car nous pourrons ainsi traiter les points critiques dans l'ordre qui nous conviendra.

Soit f une fonction de Morse sur la surface M .

Lemme 3.15. *Soit $p \in M$ un point critique de f d'indice 0. On pose $f(p) = c$. Soit $a \leq c$ un réel. Alors il existe une fonction de Morse g sur M qui possède les mêmes points critiques avec mêmes indices que f et qui coïncide avec f en dehors d'un voisinage canonique de p et telle que $g(p) = a$*

Démonstration. Si $a = c$, il n'y a rien à prouver.

Si $a < c$: soit (ϕ, U) une paramétrisation canonique de M centrée en p . Soit $\phi(U) = V$ et $f(\partial V) = b$. Soit $\alpha : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $\alpha' > 0$, $\alpha(c) = a$ et $\alpha(x) = x$ sur un voisinage de b .

On définit désormais $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$g(x) = \begin{cases} \alpha(f(x)), & \text{si } x \in V \\ f(x), & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

g est une fonction de Morse qui vérifie les conditions du Lemme.

Premièrement $g(p) = \alpha(f(p)) = \alpha(c) = a$. Pour $x \in V$, $Dg(x) = \alpha'(f(x))Df(x)$ et ainsi g et f ont même points critiques car $\alpha' > 0$. p est donc l'unique point critique de g dans

V . Puisque $g \circ \phi(X, Y) = \alpha(f(p) + X^2 + Y^2)$ sur U , la hessienne de $g \circ \phi$ en $(0, 0)$ est donnée par :

$$H(g) = \begin{pmatrix} 2\alpha'(c) & 0 \\ 0 & 2\alpha'(c) \end{pmatrix}$$

Et donc l'indice du point critique p est donc bien 0. \square

Lemme 3.16. *Soit $p \in M$ un point critique de f d'indice 2. On pose $f(p) = c$. Soit $a \geq c$ un réel. Alors il existe une fonction de Morse g sur M qui possède les mêmes points critiques avec mêmes indices que f et qui coïncide avec f en dehors d'un voisinage canonique de p et telle que $g(p) = a$*

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve du lemme précédent en remplaçant f par $-f$. \square

Lemme 3.17. *Soit $p \in M$ un point critique de f d'indice 1 et U un voisinage canonique de p dont les courbes de niveaux $f(x) = a$ et $f(x) = b$ avec $a < b$. On pose $f(p) = c$. Soit $d \in [a, b]$. Alors il existe une fonction de Morse g sur M qui possède les mêmes points critiques de f avec mêmes indices et qui coïncide avec f en dehors du voisinage canonique U de p et telle que $g(p) = d$.*

Démonstration. L'idée est de changer la fonction modèle g_1 à l'intérieur de U d'une certaine manière qui nous permettra d'obtenir la fonction de Morse voulue.

Dans un premier temps supposons que pour tout d tel que $c + d \in [a, b]$, il existe un voisinage bornée U_1 de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $h(x, y) = x^2 - y^2$ pour $(x, y) \notin U_1$, $h(0, 0) = d$ et $(0, 0)$ est l'unique point critique de h dont l'indice est 1 (on ne peut prendre que d tel que $c + d \in [a, b]$ car sinon on sort du voisinage canonique).

Supposons cette assertion vraie et complétons la preuve puis nous démontrerons cette assertion dans un second temps.

Soit (ϕ, U) une paramétrisation canonique telle que $U_1 \subset U$. On définit $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} f(p) + h \circ \phi^{-1}(x) & \text{si } x \in \phi(U) = V \\ f(x) & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

Alors $g(p) = c + h(0, 0) = c + d$. De plus les points critiques de g dans V , sont exactement les points critiques de $h \circ \phi^{-1}$ dans U . L'unique point critique de g dans V est donc p et il est d'indice 1. Hors de $\phi(U_1)$, on a $g(x) = f(p) + h \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$. Ceci est en particulier vrai sur la frontière de U . La fonction g est donc bien \mathcal{C}^∞ .

Reste maintenant à prouver l'assertion. Soit $d > 0$ fixé. Soit $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive \mathcal{C}^∞ telle que $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$, $yw'(y) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $w(y) = 0$ pour $y \notin [-\alpha, \alpha]$ pour certains $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une seconde fonction positive $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lambda(0) = a$, $\lambda'(0) = 0$, $\lambda(x) = 0$ pour $x \notin [-\alpha, \alpha]$ pour certains $\alpha \in \mathbb{R}$ et telle que :

$$2x + \lambda'(x) > 0 \quad \text{si } x > 0,$$

$$2x + \lambda'(x) < 0 \quad \text{si } x < 0.$$

On définit $h(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x)w(y)$. Alors $h(0, 0) = d$ et $h(x, y) = x^2 - y^2$ pour $(x, y) \notin [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha]$ car λ et w sont nulles sur $[-\alpha, \alpha]$.

Montrons que $(0, 0)$ est le seul point critique de h :

$$h_x = 2x + \lambda'(x)w(y) \text{ et } h_y = -2y + \lambda(x)w'(y)$$

$(0, 0)$ est donc un point critique de h . Soit $(x, y) \neq 0$. Puisque $w \in [0, 1]$,

$$h_x = 2x + \lambda'(x)w(y) > 2x + \lambda'(x) > 0 \text{ si } x > 0$$

$$h_x = 2x + \lambda'(x)w(y) < 2x + \lambda'(x) > 0 \text{ si } x < 0$$

Donc si $x \neq 0$, $h_x \neq 0$.

Reste à traiter le cas où $x = 0$:

$$h_y = -2y + \lambda(x)w'(y) < 0 \text{ si } y > 0 \text{ car } w'(y) < 0$$

$$h_y = -2y + \lambda(x)w'(y) > 0 \text{ si } y < 0 \text{ car } w'(y) > 0$$

Donc $(0, 0)$ est le seul point critique de h . De plus :

$$h_{xx} = 2 + \lambda''(x)w(y), \quad h_{yy} = -2 + \lambda(x)w''(y), \quad \text{et } h_{xy} = \lambda'(x)w'(y)$$

La Hessienne en $(0, 0)$ est donc :

$$H(h)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 + \lambda''(0) & 0 \\ 0 & -2 + \lambda w''(0) \end{pmatrix}$$

Et d'après les constructions de λ et w , l'indice du point critique $(0, 0)$ est bien 1. Si $a < 0$, on prend $h(x, y) = x^2 - y^2 - w(x)\lambda(y)$ et la démonstration est identique. On a donc bien montré le lemme. \square

Définition 3.18. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. et X_i, Y_j et Z_k les points critiques d'indices 0, 1 et 2 respectivement. La **fonction de Morse** f est dite **ordonnée** si $f(X_i) < f(Y_j) < f(Z_k)$ pour tout i, j et k .

Théorème 3.19. Sur toute surface compacte M , il existe une fonction de Morse ordonnée.

Démonstration. Soit f une fonction de Morse sur M . Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tels que les points critiques d'indice 1 soient dans $W(a, b)$. D'après le lemme 3.15, on peut trouver une fonction de Morse telle que toutes les valeurs critiques d'indice 0 soient plus petites que a . De même par le lemme 3.16, on peut trouver une fonction de Morse telle que toutes les valeurs critiques d'indice 2 soient supérieures à b .

On arrange ensuite la fonction pour que les valeurs critiques soient toutes différentes. \square

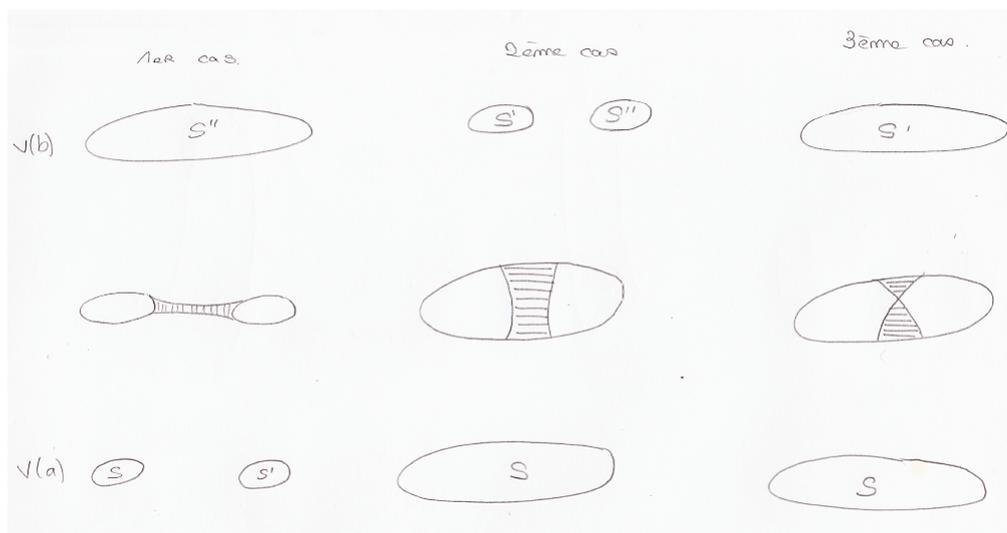
Proposition 3.20. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse ordonnée. Soit a et b dans \mathbb{R} avec $a < b$ qui séparent les points critiques d'indices 0, 1 et 2. Alors pour tout point critique $p \in M$ d'indice 1 et pour tout $c \in [a, b]$, il existe une fonction de Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(p) = c$.

Démonstration. D'après le lemme 3.17, on peut modifier la valeur d'un point critique à l'intérieur de son voisinage canonique. Pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que pour tout point critique d'indice 1, il existe des voisinages canoniques de niveau inférieur a et de niveau supérieur b telle que ces voisinages canoniques soient disjoints deux à deux. Nous n'allons pas faire cette preuve. L'idée de celle-ci est expliquée dans [Gra]. \square

Intéressons nous maintenant aux simplifications que l'on peut effectuer sur la fonctions de Morse :

Définition 3.21. Soit f une fonction de Morse sur une surface M . Soient a et b deux valeurs régulières de f telles que $a < b$. Supposons que $W(a, b)$ ne contienne qu'une seule valeur critique p de type 1. Et soit m et n le nombre de composantes connexes de $V(a)$ et $V(b)$ respectivement. Alors on dit que :

1. p est de type I.a si $m - n = -1$
2. p est de type I.b si $m - n = 1$
3. p est de type II si $m = n$.



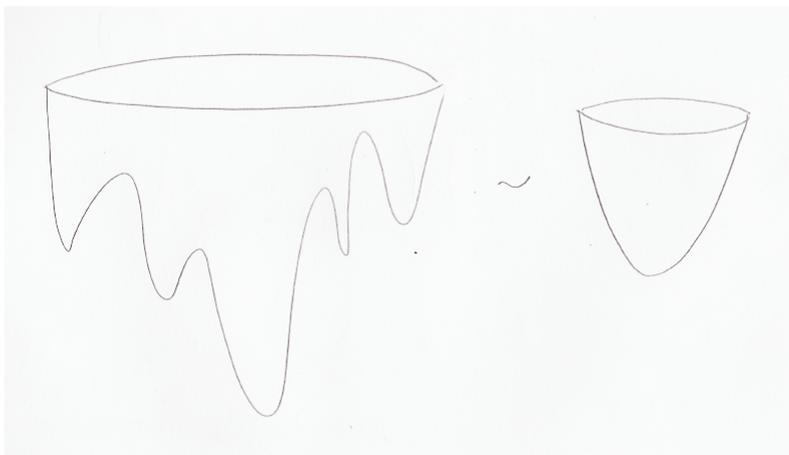
Remarque. Les trois cas ci-dessus sont les trois seuls qui peuvent se produire. En effet, $V(a)$ possède un nombre fini de composantes connexes. Pour obtenir $V(b)$, on recolle un rectangle par deux de ses côtés opposés le long de deux segments I et J disjoints d'après la proposition 3.14. Il y a trois manières de recoller ce rectangle :

- I et J ne sont pas dans la même composante connexe. L'espace obtenu est homéomorphe à un cercle et le point est donc de type I.a (une composante connexe en moins).
- I et J sont dans la même composante connexe et le rectangle est recollé avec orientation compatible et le point est donc de type I.b (une composante connexe en plus).

- I et J sont dans la même composante connexe et le rectangle est recollé avec orientation non compatible et le point est donc de type II (le nombre de composantes connexes est inchangé).

Lemme 3.22. Soit f une fonction de Morse ordonnée sur une variété M . Soient a, b , deux valeurs régulières de f telles que $a < b$ et $W(a, b)$ contienne p points critiques d'indice 0 et p points critiques d'indice 1 de type I.a. Alors $M(a)$ est homéomorphe à $M(b)$.

Soient a, b , deux valeurs régulières de f telles que $a < b$ et $W(a, b)$ contienne p points critiques d'indice 2 et p points critiques d'indice 1 de type I.b. Alors $M(a)$ est homéomorphe à $M(b)$.



Démonstration. Prouvons la première partie du théorème :

Puisque f est une fonction de Morse ordonnée, $M(a)$ ne contient que des points critiques de type 0. Soit q le nombre de points critiques d'indice 0 dans $M(a)$. Alors $M(a)$ est une union disjointe de q disques. Pour montrer ce lemme, nous devons donc montrer que $M(b)$ est également une union disjointe de q disques.

Soient $\{X_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$ les points critiques d'indice 0 et $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$ les points critiques d'indice 1 de type I.a dans $M(b)$. Soient a_1, \dots, a_p des valeurs régulières de f telles que :

$$f(X_i) < a < f(X_j) < a_1 < f(Y_1) < a_2 < f(Y_2) < a_3 < \dots < a_p < f(Y_p) < b$$

pour tout $1 \leq i \leq q$ et $q+1 \leq j \leq p+q$.

Alors $M(a_1)$ est homéomorphe à l'union disjointe de $p+q$ disques que l'on nomme $\{D_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$. Puisque Y_1 est un point critique de type I.a, il existe deux disques dans $M(a_1)$, disons D_1 et D_2 quitte à renuméroter, tels que ces deux disques sont reliés par un rectangle. Ce recollement de disque et rectangle, est homéomorphe à un nouveau disque. D'où $M(a_2)$ est une union disjointe de $p+q-1$ disques. En procédant de la sorte, on réduit d'un le nombre de disque à chaque passage d'un point critique Y_j . $M(b)$ est donc l'union disjointe de $p+q-p = q$ disques. Ce qui prouve donc que $M(a)$ et $M(b)$ sont homéomorphes.

Prouvons la deuxième partie du théorème :

Puisque f est une fonction de Morse ordonnée, $M \setminus M(b)$ ne contient que des points critiques de type 2. Soit q le nombre de points critiques d'indice 0 dans $M \setminus M(b)$. Alors $M \setminus M(b)$ est une union disjointe de q disques. Pour montrer ce lemme, nous devons donc montrer que $M(a)$ est également une union disjointe de q disques.

Soient $\{X_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$ les points critiques d'indice 2 et $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$ les points critiques d'indice 1 de type I.a dans $M \setminus M(a)$. Soient a_1, \dots, a_p des valeurs régulières de f telles que :

$$f(X_i) > b > f(X_j) > a_1 > f(Y_1) > a_2 > f(Y_2) > a_3 > \dots > a_p > f(Y_p) > a$$

pour tout $1 \leq i \leq q$ et $q+1 \leq j \leq p+q$.

Alors $M \setminus M(a_1)$ est homéomorphe à l'union disjointe de $p+q$ disques que l'on nomme $\{D_i\}_{1 \leq i \leq p+q}$. Puisque Y_1 est un point critique de type I.a, il existe deux disques dans $M \setminus M(a_1)$, disons D_1 et D_2 quitte à renuméroter, tels que ces deux disques sont reliés par un rectangle. Ce recollement de disque et rectangle, est homéomorphe à un nouveau disque. D'où $M \setminus M(a_2)$ est une union disjointe de $p+q-1$ disques. En procédant de la sorte, on réduit d'un le nombre de disque à chaque passage d'un point critique Y_j . $M \setminus M(a)$ est donc l'union disjointe de $p+q-p=q$ disques. Ce qui prouve donc que $M \setminus M(a)$ et $M \setminus M(b)$ sont homéomorphes et donc $M(a)$ et $M(b)$ sont homéomorphes.

La preuve de la deuxième partie du lemme est similaire à la précédente. \square

Soient la surface M et la fonction f comme ci-dessus, alors on peut supposer qu'il existe une fonction de Morse f qui ne possède qu'un point critique d'indice 0, qu'un point critique d'indice 2 et n points critiques d'indices 1. En effet : en notant $n(0)$ et $n(2)$ le nombre de points critiques d'indice 0 et 2, on sait qu'il y a au moins $n(0) - 1$ points critiques d'indices 1 de type I.a car ce sont les seuls qui diminuent le nombre de composantes connexes des lignes de niveaux et $n(2) - 1$ points critiques de type I.b car ce sont les seuls qui augmentent le nombre de composantes connexes des lignes de niveaux. On déforme la fonction de Morse f afin que les points décrits ci-dessus se situent dans $W(c, d)$ pour certains $c, d \in \mathbb{R}$. D'après le lemme précédent $M(c)$ et $M(d)$ sont homéomorphes à des disques.

Ainsi on ne s'intéressera qu'aux points critiques d'indice 1 de fonction de Morse ne possédant qu'un point critique d'indice 0 et un seul d'indice 2.

Nous avons ainsi simplifié le problème.

4 Théorème de classification

Maintenant que nous avons développé les outils nécessaires à l'aide de la théorie de Morse, nous allons dans cette partie démontrer le théorème de classification des surfaces compactes qui suit :

Théorème 4.1. *Toute surface différentiable compacte et connexe, est homéomorphe à un espace \mathbb{U}_q pour $q \geq 1$ ou à un espace \mathbb{T}_p pour $p \geq 0$ et ces surfaces sont non-homéomorphes deux à deux.*

Le fait que ces surfaces sont non-homéomorphes deux à deux a déjà été traité dans la proposition 2.20.

Dans un premier temps, démontrons quelques résultats intermédiaires.

Nous posons les notations suivantes :

M est une surface compacte, f une fonction de Morse sur M .

Lemme 4.2. *Si sur la surface M , la fonction de Morse f possède un point critique d'indice 0, un point critique d'indice 2 et q points critiques d'indices 1, tous de type II, alors M est homéomorphe à \mathbb{U}_q .*

Démonstration. Montrons ce lemme par récurrence.

Soit a la valeur critique du minimum de f et b la valeur critique du maximum.

Cas où $q = 1$: Soit c une valeur critique entre a et b . Alors $M(b)$ est homéomorphe à un ruban de Moebius. En effet on a recollé un rectangle sur un disque avec orientation non compatible. $M \setminus M(b)$ est un disque car il n'y a qu'un seul point critique dans cette ensemble et c'est un maximum. L'espace M est donc obtenu en recollant un disque le long d'un ruban de Moebius ce qui est une autre caractérisation du plan projectif. M est donc homéomorphe à $\mathbb{U}_1 = \mathbb{R}P^2$.

Cas où $q \geq 2$: Supposons que pour un certain $q \in \mathbb{N}$, si M possède un unique point critique d'indice 0, un unique point critique d'indice 2 et q points critiques d'indices 1 tous de type II alors M est homéomorphe à \mathbb{U}_q et montrons que si M possède deux points critiques d'indices 0 et 2 et $q + 1$ points critiques d'indices 1 de type II, alors M est homéomorphe à \mathbb{U}_{q+1} . Soient a_1, \dots, a_{q+1} les valeurs critiques notées dans l'ordre croissant. D'après l'hypothèse de récurrence, $M(a_q)$ est homéomorphe à \mathbb{U}_q privé d'un disque et d'après le cas $q = 1$, $M \setminus M(a_q)$ est homéomorphe à un ruban de Moebius et donc à \mathbb{U}_1 privé d'un disque. Par recollement, on a donc M homéomorphe à $\mathbb{U}_q \# \mathbb{U}_1$, c'est-à-dire \mathbb{U}_{q+1} . \square

Lemme 4.3. *Si sur la surface M la fonction de Morse f possède un unique point critique d'indice 0, un unique point critique d'indice 2 et q points critiques d'indices 1, tous de type I, alors q est pair $q = 2p$ et M est homéomorphe à \mathbb{T}_p .*

Démonstration. Tout d'abord q est pair car les points critiques d'indice 1 de type I changent le nombre de composantes connexes. De plus, il y a autant de points critiques d'indice 1 de type I.a que I.b car l'un augmente le nombre de composantes connexes des lignes de niveaux de f , et l'autre le diminue.

Nous modifions la fonction f afin d'obtenir une fonction de Morse ordonnée, avec un seul point critique d'indice 0, un seul point critique d'indice 2 et telle que les points critiques d'indice 1 de type I.b, soient suivis par des points critiques d'indice 1 de types I.a (ce qui est licite d'après le lemme 3.20).

Soit c et d deux valeurs régulières de f telles que $W(c, d)$ contienne tout les points critiques d'indice 1. Puisque $M'(d)$ est un disque, il suffit de montrer que $M(d)$ est homéomorphe à \mathbb{T}_p privé d'un disque. Procédons par récurrence sur le nombre de paires de points critiques (de type I.a et I.b) contenus dans $W(c, a)$ pour a une valeur régulière telle que $a > c$.

Soit a une valeur régulière de f telle que $W(c, a)$ contienne une paire de points critiques d'indice 1, le premier d'indice I.b et le second d'indice I.a. Alors $W(c, a)$ est homéomorphe à \mathbb{T}_1 privé d'un disque. En effet on recolle deux bandes successives.

Ajouter photo.

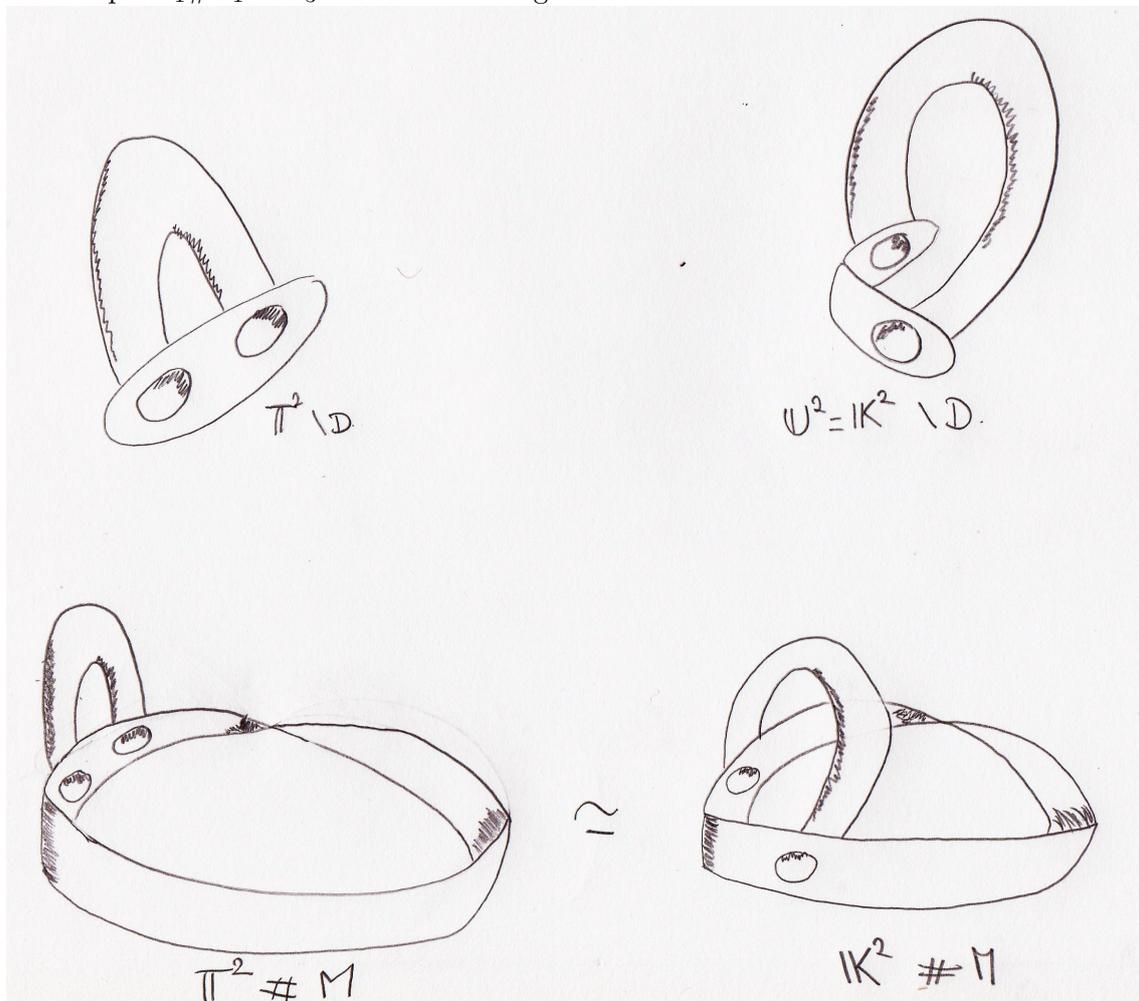
Supposons désormais le résultat connu pour k paires de points critiques et montrons le résultat pour $k + 1$. Soit e une valeur régulière de f telle que $W(c, e)$ contienne k paires de points critiques d'indice 1 de type I. Par récurrence, $M(e)$ est homéomorphe à \mathbb{T}_k privé d'un disque et $V(e)$ à un cercle. Lors du passage du prochain couple, on recolle encore deux bandes et cela revient donc à effectuer la somme connexe avec \mathbb{T}_1 .

Ajouter photo.

On a donc que $M(d)$ est homéomorphe à \mathbb{T}_p privé d'un disque et donc après passage du point critique d'indice 2 et recollement d'un disque, on obtient que M est homéomorphe à \mathbb{T}_p . □

Lemme 4.4. Soient $m \geq 0$ et $n > 0$. La somme connexe $\mathbb{T}_m \# \mathbb{U}_n$ est homéomorphe à \mathbb{U}_{2m+n} .

Démonstration. Ce lemme se montre à l'aide d'une récurrence et du fait que $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \sim \mathbb{U}_3$. Le fait que $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \sim \mathbb{U}_3$ découle de l'image suivante :



Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que $\mathbb{T}_m \# \mathbb{U}_1 \sim \mathbb{U}_{2m+1}$. Nous démontrons cela par récurrence sur m :

Supposons connu le résultat pour tout $k < m$. Alors :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{T}_m \# \mathbb{U}_1 \\
 & \sim \mathbb{T}_{m-1} \# \mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \\
 & \sim \mathbb{T}_{m-1} \# \mathbb{U}_3 \\
 & \sim \mathbb{T}_{m-1} \# \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_2 \\
 & \sim \mathbb{U}_{2m-2+1} \# \mathbb{U}_2 \\
 & \sim \mathbb{U}_{2m+1}.
 \end{aligned}$$

□

La démonstration du théorème se déduit facilement des lemmes précédents :

Démonstration. Soit f une fonction de Morse, ordonnée sur M . Si les points critiques d'indice 1 sont tous de type II, alors d'après le lemme 4.2, M est homéomorphe à \mathbb{U}_q pour un certain entier q .

Si les points critiques d'indice 1 sont tous de type I et en nombre pair, alors d'après le lemme 4.3, M est homéomorphe à \mathbb{T}_p pour un certain p .

Il reste à voir le cas où f possède des points critiques d'indice 1 de type I et de type II. Nous allons montrer que dans ce cas, M est homéomorphe à \mathbb{U}_q pour un certain entier q . Nous modifions f en une fonction g telle que si Y et Y' sont des points critiques d'indice 1 de type I et II respectivement, alors $g(Y) < g(Y')$. De plus, on suppose comme précédemment que les points critiques d'indice 1 de type I sont arrangés en couple. Soit a une valeur régulière de g qui sépare les points critiques d'indice 1 de type I de ceux de type II. Alors d'après le lemme 4.2, $M \setminus M(a)$ est homéomorphe à \mathbb{U}_k privé d'un disque pour un certain entier k et d'après le lemme 4.3, $M(a)$ est homéomorphe à \mathbb{T}_p pour un certain entier p . L'espace M est donc la somme connexe de ces deux espaces. Or $\mathbb{U}_k \# \mathbb{T}_p \sim \mathbb{U}_{2p+k}$ d'après le lemme 4.4 et donc M est homéomorphe à \mathbb{U}_q pour un certain entier q .

On a donc bien montré le théorème. □

Théorème 4.5. *Soit M une surface différentiable compacte avec bord. Soit k le nombre de composantes de bord de M . Alors M est homéomorphe soit à \mathbb{T}_n avec k trous, soit à \mathbb{U}_m avec k trous pour des entiers m et n .*

Démonstration. Puisque la frontière de la surface est une sous-variété de dimension 1, chaque composante de bord est homéomorphe à un cercle. La surface obtenue par recollement de k disques le long de ces k cercles est une surface compacte sans bord et est donc d'après le théorème 4.1 homéomorphe soit à \mathbb{T}_n ou à \mathbb{U}_m pour certains entiers m et n . □

Nous arrivons à ce résultat à la frontière du monde topologique et du monde différentiable à cause de la somme connexe. En effet nous avons défini celle-ci dans le monde topologique (à homéomorphisme près) et nous avons admis qu'elle était bien définie. On aurait pu la définir autrement pour arriver à la classification à difféomorphisme près (en effectuant quelques modifications dans certaines preuves, notamment 3.22, on peut se référer à [Flo] pour le recollement via des difféomorphismes).

Les classifications des surfaces topologiques à homéomorphisme près et celle des surfaces topologiques à difféomorphisme près mènent au même résultat (on peut se référer à [Mas] ou à [Hir]).

Références

- [Cal] Josette Calais. *Eléments de théorie des groupes.*
- [eDT] Yves Félix et Daniel Tanré. *Topologie Algébrique.*
- [Flo] Deloup Florian. *Quelques Aspects des Invariants de Variétés de Dimension 3.*
- [Gra] André Gramain. *Topologie des surfaces.*
- [Hat] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.*
- [Hir] M. W. Hirsch. *Differential Topology.*
- [Lan] Serge Lang. *Algèbre.*
- [Mas] William S. Massey. *Algebraic Topology.*